

1

OBJETIVO 4

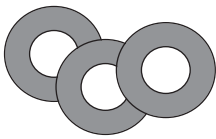
IDENTIFICAR LOS MÚLTIPLOS Y LOS DIVISORES DE UN NÚMERO

Los **múltiplos** de un número son aquellos números que se obtienen multiplicando dicho número por 1, 2, 3, 4, 5, ..., es decir, por los números naturales.

×	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	...

Múltiplos de 5 → 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, ...

EJEMPLO



En una tienda las rosquillas se venden en paquetes de 3 unidades. ¿Cuántas puedo comprar si me llevo varios paquetes?

$3 \cdot 1 = 3 \text{ rosquillas}$

$3 \cdot 2 = 6 \text{ rosquillas}$

$3 \cdot 3 = 9 \text{ rosquillas}$

$3 \cdot 4 = 12 \text{ rosquillas}$

$3 \cdot 5 = 15 \text{ rosquillas}$

$3 \cdot 6 = 18 \text{ rosquillas}$

- Podemos comprar 3, 6, 9, 12, 15, 18... rosquillas.
- 3, 6, 9, 12, 15, 18... son múltiplos de 3.
- Los múltiplos de un número contienen a este una cantidad exacta de veces: 1, 2, 3, 4, 5, 6... paquetes de 3 unidades.

1 Lucas va al supermercado y observa que los pañuelos se venden en paquetes de 3 unidades, los yogures en grupos de 4 unidades y las pelotas de tenis en botes de 5 unidades. ¿Cuántas unidades de cada artículo podríamos comprar?

2 Escribe los números que sean:

- Múltiplos de 5 y menores que 51.
- Múltiplos de 25 y menores que 105.
- Múltiplos de 30 y que estén comprendidos entre 50 y 280.
- Múltiplos de 1.000 y que estén comprendidos entre 990 y 10.100.

Los **divisores** de un número son aquellos números enteros que caben en él una cantidad exacta de veces.

Para hallarlos: 1.º Realizamos todas las divisiones posibles (entre números menores e igual que él) tomando el número como dividendo.

2.º Buscamos las divisiones que sean exactas (resto = 0).

Calculamos los divisores de 8.

8 $\overline{)1}$	8 $\overline{)2}$	8 $\overline{)3}$	8 $\overline{)4}$	8 $\overline{)5}$	8 $\overline{)6}$	8 $\overline{)7}$	8 $\overline{)8}$
0 8	0 4	2 2	0 2	3 1	2 1	1 1	0 1

- 1, 2, 4 y 8 ... son divisores de 8. Dividen exactamente a 8.
- 3, 5, 6 y 7 no son divisores de 8. No lo dividen exactamente (resto \neq 0).

3 Realiza todas las divisiones posibles del número 12 entre números menores e igual que él.

4 Completa la tabla con los datos del ejercicio anterior.

DIVISORES DE 12	
NO DIVISORES DE 12	

Cualquier número tiene al menos dos divisores: él mismo y la unidad.

5 Tacha aquellos números que *no* sean:

- a) Divisores de 2 = {1, 2, 3}
- b) Divisores de 9 = {1, 2, 3, 4, 6, 9}
- c) Divisores de 11 = {1, 3, 7, 9, 11}
- d) Divisores de 25 = {1, 3, 5, 10, 15, 20, 25, 30}
- e) Divisores de 48 = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 12, 16, 20, 24, 30, 45, 48}
- f) Divisores de 100 = {1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 40, 50, 60, 75, 90, 100}

6 Rellena los huecos con los divisores correspondientes.

$$\begin{array}{cccccccccc}
 36 \overline{) 1} & 36 \overline{) \quad} & 36 \overline{) \quad} & 36 \overline{) \quad} & 36 \overline{) \quad} & 36 \overline{) \quad} & 36 \overline{) \quad} & 36 \overline{) \quad} & 36 \overline{) \quad} \\
 06 \ 36 & 16 \ 18 & 06 \ 12 & 0 \ 9 & 0 \ 6 & 0 \ 4 & 0 \ 3 & 0 \ 2 & 0 \ 1 \\
 0 & 0 & 0 & & & & & & &
 \end{array}$$

7 Los divisores de 36 son:

Múltiplo y divisor son dos conceptos estrechamente ligados. En una división exacta entre dos números existe una relación especial llamada **divisibilidad**.

$$\begin{array}{r}
 49 \overline{) 7} \\
 0 \ 7 \\
 \hline
 \end{array}$$

- 49 es múltiplo de 7.
- 7 es divisor de 49.

- El número mayor es múltiplo del menor.
- El número menor es divisor del mayor.

De igual forma:

$$\begin{array}{r}
 64 \overline{) 4} \\
 24 \ 16 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

- 64 es múltiplo de 4.
- 4 es divisor de 64.

$$\begin{array}{r}
 35 \overline{) 5} \\
 0 \ 7 \\
 \hline
 \end{array}$$

- 35 es múltiplo de 5.
- 5 es divisor de 35.

8 Completa los huecos con la palabra adecuada: múltiplo o divisor.

- a) 25 es de 5
- c) 16 es de 8
- b) 60 es de 120
- d) 11 es de 33

1

OBJETIVO 5

DESCOMPONER EN FACTORES PRIMOS. EL m.c.d. Y EL m.c.m.

- **Número primo:** es aquel número que solo tiene dos divisores, él mismo y la unidad.

- **Número compuesto:** es aquel número que tiene más de dos divisores.

Divisores de 5 = 1 y 5

5 es un número primo.

Divisores de 8 = 1, 2, 4 y 8

8 es un número compuesto.

1 En la siguiente serie de números, tacha los que son compuestos (*los que tienen más de dos divisores*).

1 2 3 ~~4~~ 5 ~~6~~ 7 ~~8~~ 9 10 11 12 13 14 15
16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30

- Los que quedan sin tachar son números
- Solo tienen divisores, que son

2 En la siguiente serie de números, tacha los que son compuestos (*los que tienen más de dos divisores*).

31 ~~32~~ ~~33~~ ~~34~~ 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45
46 47 48 49 50 51 52 53 54 55 56 57 58 59 60

- Los que quedan tachados son números
- Tienen más de divisores.

DESCOMPONER UN NÚMERO EN FACTORES PRIMOS

- Ya sabemos que los primeros números primos son: 2, 3, 5, 7, 11, 13, ...
- Todo número compuesto se puede expresar como producto de otros que sean primos, y expresar sus divisores mediante la combinación de esos números, que llamamos **factores primos**.
- Para realizar la descomposición seguimos estos pasos.
 - 1.º Intentar dividir el número entre 2, tantas veces como se pueda.
 - 2.º Luego intentar también dividir el número restante entre 3, tantas veces como se pueda.
 - 3.º Seguir probando a dividir el número restante entre 5, 7, 11... tantas veces como se pueda, hasta obtener como cociente 1.
 - 4.º Expresar el número como producto de potencias de factores primos.

EJEMPLO

Realiza la descomposición en producto de factores primos del número 60.

En la práctica se hace así:

Línea que actúa como «ventana» de división

60	2
30	2
15	3
5	5
1	

y se expresa: $60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$

Recordando las potencias quedaría:

$$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$$

60 queda así expresado como producto de factores primos.

- 3 Descompón los siguientes números en factores primos y exprésalos como producto de ellos: 24, 30, 45 y 60.

$$\begin{array}{r|l} 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$$

$$24 = 2^3 \cdot 3$$

$$\begin{array}{r|l} 30 & 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 45 & 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 60 & 2 \end{array}$$

- 4 Descompón los siguientes números en factores primos y exprésalos como producto de ellos: 25, 33, 75 y 100.

DIVISORES COMUNES A VARIOS NÚMEROS. MÁXIMO COMÚN DIVISOR (m.c.d.)

Luis tiene 12 trenes de plástico y Pedro 18 aviones. Quieren hacer grupos con el mismo número de vehículos en cada uno de ellos. ¿Cuál será el grupo más grande y que tenga igual número de ambos juguetes?

- Calculamos los divisores de ambos números:

– Divisores de 12 = {1, 2, 3, 4, 6, 12}

Juan puede hacer grupos iguales de 1, 2, 3, 4, 6 y 12 trenes.

– Divisores de 18 = {1, 2, 3, 6, 9, 18}

Pedro puede hacer grupos iguales de 1, 2, 3, 6, 9 y 18 aviones.

- 1, 2, 3 y 6 son divisores comunes de 12 y 18.
- 6 es el divisor mayor (máximo) de 12 y 18 y es común a ambos números.
- 6 es el máximo común divisor de 12 y 18 y se expresa así: m.c.d. (12 y 18) = 6.

El grupo más grande y con el mismo número de juguetes de los dos tipos estará formado por 6 trenes y 6 aviones.

- 5 Halla los divisores comunes de:

a) 20 y 25

b) 16 y 24

c) 8 y 12

d) 8, 10 y 12

6 Calcula el m.c.d. de los números de cada apartado del ejercicio anterior.

MÉTODO PARA EL CÁLCULO DEL MÁXIMO COMÚN DIVISOR

Hasta ahora el proceso empleado para calcular el m.c.d. es adecuado para números sencillos. Vamos a estudiar un método más directo y para números de cualquier tamaño. Seguiremos estos pasos.

- 1.º Descomponer los números en factores primos.
- 2.º Expresar los números como producto de factores primos.
- 3.º Escoger en ambos números los **factores** que sean **comunes** y que tengan el **menor exponente**.
- 4.º El producto de esos factores es el m.c.d.

EJEMPLO

Calcula el m.c.d. de 24 y 36.

1.º	24	2	36	2
	12	2	18	2
	6	2	9	3
	3	3	3	3
	1		1	

2.º $24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3$

$36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3^2$

3.º Factores comunes: 2 y 3

Con menor exponente: 2^2 y 3^1

4.º m.c.d. (24 y 36) = $2^2 \cdot 3 = 4 \cdot 3 = 12$

7 Calcula el m.c.d. de los números.

a) 6 y 15

b) 15 y 20

c) 10 y 35

d) 25 y 50

8 Completa la siguiente tabla.

NÚMEROS	DESCOMPOSICIÓN EN FACTORES PRIMOS	PRODUCTO DE FACTORES COMUNES CON MENOR EXPONENTE	m.c.d.
60 y 40	$2^2 \cdot 3 \cdot 5$ $2^3 \cdot 5$	$2^2 \cdot 5$	20
18 y 30			
	5^2 $2^2 \cdot 5^2$		

- 9** Queremos embalar 40 latas de refresco de cola y 100 latas de referesco de limón en cajas de igual tamaño, lo más grandes posible y sin mezclarlas. ¿Cuántas latas pondremos en cada caja?

MÚLTIPLOS COMUNES A VARIOS NÚMEROS. MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO (m.c.m.)

Ana va a nadar al polideportivo cada 3 días y Eva cada 4. ¿Cada cuánto tiempo coincidirán en el polideportivo?

- Ana va los días 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27... ———> Son los múltiplos de 3.
- Eva va los días 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32... ———> Son los múltiplos de 4.
- 12, 24 ... son los múltiplos comunes de 3 y 4.
- 12 es el múltiplo menor (mínimo) de 3 y 4 y es común a ambos números.
- 12 es el mínimo común múltiplo de 3 y 4 y se expresa así: $m.c.m. (3 \text{ y } 4) = 12$.

Ana y Eva coincidirán en el polideportivo cada 12 días.

- 10** Halla los 3 primeros múltiplos comunes de:

a) 5 y 10

c) 4 y 6

b) 9 y 12

d) 8 y 20

- 11** Calcula el m.c.m. de los números de cada apartado del ejercicio anterior.

MÉTODO PARA EL CÁLCULO DEL MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO

Hasta ahora el proceso empleado para calcular el m.c.m. es adecuado para números sencillos. Vamos a estudiar un método más directo y para números de cualquier tamaño.

- 1.º Descomponer los números en factores primos.
- 2.º Expresar los números como producto de factores primos.
- 3.º Escoger en ambos números los **factores** que sean **comunes y no comunes** y que tengan el **mayor exponente**.
- 4.º El producto de esos factores es el m.c.m.

EJEMPLO

Calcula el m.c.m. de 12 y 60.

1.º	12		2	60		2	2.º	$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3$	3.º	Factores comunes: 2 y 3
	6		2	30		2		$60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 =$		Factores no comunes: 5
	3		3	15		3		$= 2^2 \cdot 3 \cdot 5$		Con mayor exponente: $2^2 \cdot 3 \cdot 5$
	1			5		5	4.º	m.c.m. (12 y 60) = $2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 4 \cdot 3 \cdot 5 = 60$		
				1						

12 Calcula el m.c.m. de los números.

- a) 15 y 20 b) 8 y 12 c) 10 y 30 d) 9 y 15

13 Completa la siguiente tabla.

NÚMEROS	DESCOMPOSICIÓN EN FACTORES PRIMOS	PRODUCTO DE FACTORES PRIMOS COMUNES Y NO COMUNES CON MAYOR EXPONENTE	m.c.m.
60 y 40	$2^2 \cdot 3 \cdot 5$ $2^3 \cdot 5$	$2^3 \cdot 3 \cdot 5$	120
18 y 30			
	$2^2 \cdot 3 \cdot 5$ $2^3 \cdot 5^2$		

14 Dos aviones de una línea aérea salen siempre del mismo aeropuerto. Uno lo hace cada 10 días y el otro cada 12. Si han salido hoy, ¿cuándo volverán a coincidir en el aeropuerto?